

大學入學考試中心
103 學年度學科能力測驗試題
數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 \square^3 與第 19 列的 \square^8 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

(Note: In the original image, the cell for row 18, column 3 is shaded black, and the cell for row 19, column 8 is shaded black.)

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 \square^- 與第 21 列的 \square^7 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

(Note: In the original image, the cell for row 20, column 12 is shaded black, and the cell for row 21, column 7 is shaded black.)

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 請問下列哪一個選項等於 $\log\left(2^{(3^5)}\right)$?

- (1) $5\log(2^3)$
- (2) $3 \times 5\log 2$
- (3) $5\log 2 \times \log 3$
- (4) $5(\log 2 + \log 3)$
- (5) $3^5 \log 2$

2. 令 $A(5,0,12)$ 、 $B(-5,0,12)$ 為坐標空間中之兩點，且令 P 為 xy 平面上滿足 $\overline{PA} = \overline{PB} = 13$ 的點。請問下列哪一個選項中的點可能為 P ?

- (1) $(5,0,0)$
- (2) $(5,5,0)$
- (3) $(0,12,0)$
- (4) $(0,0,0)$
- (5) $(0,0,24)$

3. 在坐標平面上，以 $(1,1)$ 、 $(-1,1)$ 、 $(-1,-1)$ 及 $(1,-1)$ 等四個點為頂點的正方形，與圓 $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ 有幾個交點？

- (1) 1 個
- (2) 2 個
- (3) 3 個
- (4) 4 個
- (5) 0 個

4. 請問滿足絕對值不等式 $|4x-12| \leq 2x$ 的實數 x 所形成的區間，其長度為下列哪一個選項？

- (1) 1
- (2) 2
- (3) 3
- (4) 4
- (5) 6

5. 設 $(1+\sqrt{2})^6 = a+b\sqrt{2}$ ，其中 a, b 為整數。請問 b 等於下列哪一個選項？

- (1) $C_0^6 + 2C_2^6 + 2^2C_4^6 + 2^3C_6^6$
- (2) $C_1^6 + 2C_3^6 + 2^2C_5^6$
- (3) $C_0^6 + 2C_1^6 + 2^2C_2^6 + 2^3C_3^6 + 2^4C_4^6 + 2^5C_5^6 + 2^6C_6^6$
- (4) $2C_1^6 + 2^2C_3^6 + 2^3C_5^6$
- (5) $C_0^6 + 2^2C_2^6 + 2^4C_4^6 + 2^6C_6^6$

6. 某疾病可分為兩種類型：第一類占 70%，可藉由藥物 A 治療，其每一次療程的成功率為 70%，且每一次療程的成功與否互相獨立；其餘為第二類，藥物 A 治療方式完全無效。在不知道患者所患此疾病的類型，且用藥物 A 第一次療程失敗的情況下，進行第二次療程成功的條件機率最接近下列哪一個選項？

- (1) 0.25
- (2) 0.3
- (3) 0.35
- (4) 0.4
- (5) 0.45

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 設坐標平面上， x 坐標與 y 坐標皆為整數的點稱為格子點。請選出圖形上有格子點的選項。

(1) $y = x^2$

(2) $3y = 9x + 1$

(3) $y^2 = -x - 2$

(4) $x^2 + y^2 = 3$

(5) $y = \log_9 x + \frac{1}{2}$

8. 關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $\sqrt{13} > 3.5$

(2) $\sqrt{13} < 3.6$

(3) $\sqrt{13} - \sqrt{3} > \sqrt{10}$

(4) $\sqrt{13} + \sqrt{3} > \sqrt{16}$

(5) $\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{3}} > 0.6$

9. 一物體由坐標平面中的點 $(-3, 6)$ 出發，沿著向量 \vec{v} 所指的方向持續前進，可以進入第一象限。請選出正確的選項。

(1) $\vec{v} = (1, -2)$

(2) $\vec{v} = (1, -1)$

(3) $\vec{v} = (0.001, 0)$

(4) $\vec{v} = (0.001, 1)$

(5) $\vec{v} = (-0.001, 1)$

10. 設 $f(x)$ 為實係數二次多項式，且已知 $f(1) > 0$ 、 $f(2) < 0$ 、 $f(3) > 0$ 。

令 $g(x) = f(x) + (x-2)(x-3)$ ，請選出正確的選項。

- (1) $y = f(x)$ 的圖形是開口向下的拋物線
- (2) $y = g(x)$ 的圖形是開口向下的拋物線
- (3) $g(1) > f(1)$
- (4) $g(x) = 0$ 在 1 與 2 之間恰有一個實根
- (5) 若 α 為 $f(x) = 0$ 的最大實根，則 $g(\alpha) > 0$

11. 設 $a_1 = 1$ 且 a_1, a_2, a_3, \dots 為等差數列。請選出正確的選項。

- (1) 若 $a_{100} > 0$ ，則 $a_{1000} > 0$
- (2) 若 $a_{100} < 0$ ，則 $a_{1000} < 0$
- (3) 若 $a_{1000} > 0$ ，則 $a_{100} > 0$
- (4) 若 $a_{1000} < 0$ ，則 $a_{100} < 0$
- (5) $a_{1000} - a_{10} = 10(a_{100} - a_1)$

12. 所謂某個年齡範圍的失業率，是指該年齡範圍的失業人數與勞動力人數之比，以百分數表達（進行統計分析時，所有年齡以整數表示）。下表為去年某國四個年齡範圍的失業率，**其中的年齡範圍有所重疊**。

年齡範圍	35~44 歲	35~39 歲	40~44 歲	45~49 歲
失業率	12.66(%)	9.80(%)	13.17(%)	7.08(%)

請根據上表選出正確的選項。

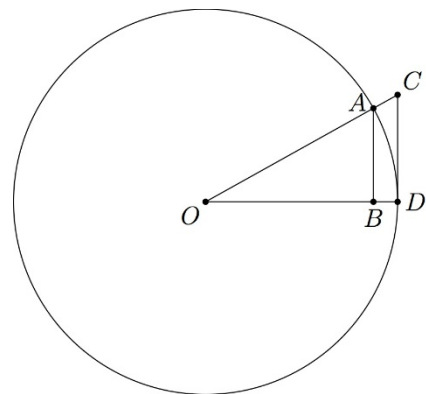
- (1) 在上述四個年齡範圍中，以 40~44 歲的失業率為最高
- (2) 40~44 歲勞動力人數多於 45~49 歲勞動力人數
- (3) 40~49 歲的失業率等於 $\left(\frac{13.17+7.08}{2}\right)\%$
- (4) 35~39 歲勞動力人數少於 40~44 歲勞動力人數
- (5) 如果 40~44 歲的失業率降低，則 45~49 歲的失業率會升高

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（13–36）。
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 設圓 O 之半徑為 24， $\overline{OC}=26$ ， \overline{OC} 交圓 O 於 A 點，
 \overline{CD} 切圓 O 於 D 點， B 為 A 點到 \overline{OD} 的垂足，如右

邊的示意圖。則 $\overline{AB} = \frac{\textcircled{13}\textcircled{14}\textcircled{15}}{\textcircled{16}\textcircled{17}}$ 。(化為最簡分數)



- B. 坐標平面上，若直線 $y = ax + b$ (其中 a, b 為實數) 與二次函數 $y = x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y = (x - 2)^2 + 12$ 的圖形恰交於一點，則 $a = \underline{\textcircled{18}}$ ， $b = \underline{\textcircled{19}\textcircled{20}}$ 。

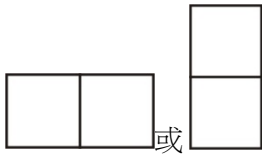
- C. 小鎮 A 距離一筆直道路 6 公里，並與道路上的小鎮 B 相距 12 公里。今欲在此道路上蓋一家超級市場使其與 A, B 等距，則此超級市場與 A 的距離須為 $\underline{\textcircled{21}}\sqrt{\textcircled{22}}$ 公里。(化為最簡根式)

- D. 坐標空間中有四點 $A(2,0,0)$ 、 $B(3,4,2)$ 、 $C(-2,4,0)$ 與 $D(-1,3,1)$ 。若點 P 在直線 CD 上變動，則內積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 之最小可能值為 $\frac{\textcircled{23}}{\textcircled{24}}$ 。(化為最簡分數)

E. 設 \vec{u}, \vec{v} 為兩個長度皆為 1 的向量。若 $\vec{u} + \vec{v}$ 與 \vec{u} 的夾角為 75° ，則 \vec{u} 與 \vec{v} 的內積

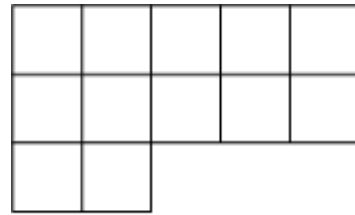
為 $\frac{\textcircled{25}\sqrt{\textcircled{26}}}{\textcircled{27}}$ 。(化為最簡根式)

F. 一個房間的地面是由 12 個正方形所組成，如右圖。今想用長方形瓷磚鋪滿地面，已知每一塊長方形瓷磚可以覆蓋兩個相鄰的正方形，即



或。則用 6 塊瓷磚鋪

滿房間地面的方法有 ②⑧ ②⑨ 種。

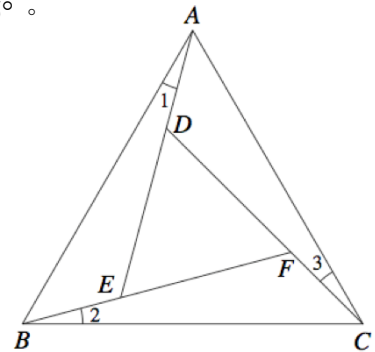


G. 已知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣，並且其行列式(值)為 $\frac{5}{8}$ 。則 $a+d = \frac{\textcircled{30}\textcircled{31}}{\textcircled{32}}$ 。(化為最簡分數)

H. 如圖，正三角形 ABC 的邊長為 1，並且 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 15^\circ$ 。

已知 $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ，則正三角形 DEF 的邊長為

$\frac{\sqrt{\textcircled{33}}}{\textcircled{34}} - \frac{\sqrt{\textcircled{35}}}{\textcircled{36}}$ 。(化為最簡根式)



參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n \mu_X^2}$$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n \sigma_X \sigma_Y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{6} \approx 2.449$, $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$, $\log_{10} 3 \approx 0.4771$, $\log_{10} 5 \approx 0.6990$, $\log_{10} 7 \approx 0.8451$